УДК 517.958

О СХОДИМОСТИ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД[1)]

Л.Л. ГЛАЗЫРИНА, М.Ф. ПАВЛОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: glazyrina-ludmila@ya.ru; maria.pavlova@kpfu.ru

ON CORVEGENCE OF FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEM OF SURFACE AND GROUND WATER COMBINED MOVEMENT

L.L. GLAZYRINA, M.F. PAVLOVA

Kazan Federal University

Аннотация

Исследуется начально-краевая задача для системы двух нелинейных вырождающихся параболических уравнений, одно из которых задано в рассматриваемой области, а второе — на проведенном в этой области разрезе. С помощью метода полудискретизации по временной переменной и МКЭ по пространственным переменным строится двухслойная схема, неявная по градиенту решения и явная по решению. При минимальных условиях на гладкость исходных данных доказывается сходимость приближенного решения к обобщенному решению рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: Математическая модель, обобщенное решение, метод конечных элементов, параболическое уравнение, монотонный оператор, сходимость.

Summary

We investigate the initial-boundary value problem for the system of two nonlinear degenerate parabolic combined equations, when the one of equations is set in the domain we consider, and the second is set on the conducted section of this domain. With help of the semidiscretization methods on a time variable and finite element method on space variable we construct a two-layer difference scheme, its an implicit with respect to gradient of solution and explicit on solution. We proved the convergence of approximate solution to the generalized solution of the problem with the minimum conditions for smoothness of the initial data.

Key words: Mathematical model,generalized solution, finite element method, parabolic equation, monotone operator, convergence.

---

1. Постановка задачи.

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^2, Γ — граница Ω, Π — разрез, проведенный внутри Ω и делящий ее на две связные области. В области $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial t}(x,t) \;-\; \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x,u(x,t),\nabla u(x,t))\right) = f_1(x,t), \quad x\in\Omega_\Pi = \Omega\setminus\Pi, \;\; t\in(0,T)\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_2(u)}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial s}\left(k_\Pi\left(x,u(x,t),\frac{\partial u}{\partial s}(x,t)\right)\right) +$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

$$+\left[\sum_{i=1}^{2} k_i(x,u(x,t),\nabla u(x,t))\cos(n,x_i)\right]_{\Pi} = f_2(x,t), \quad [u]_\Pi = 0, \quad x\in\Pi, \ \ t\in(0,T)\,, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\Omega; \qquad u(x,t) = 0, \quad x\in\Gamma, \ t\in(0,T). \tag{3}$$

Здесь $[\cdot]_\Pi$ — скачок функции при переходе через разрез Π, n — нормаль к Π.

Задача (1)–(3) описывает (см. [1]) процесс совместного движения поверхностных и подземных вод, при этом разрез Π соответствует руслу реки или канала, искомая функция u определяет высоту свободной поверхности воды над непроницаемым основанием.

Будем предполагать, что $\varphi_i(\xi)$ — абсолютно непрерывные, строго возрастающие функции, удовлетворяющие при любом $\xi\in R^1$, следующим неравенствам

$$b_{0i}\mid\xi\mid^{\alpha_i} - b_{1i} \leqslant \Phi_i(\xi) \equiv \int\limits_0^{\xi}\varphi_i'(t)t\,dt \leqslant b_{2i}\mid\xi\mid^{\alpha_i} + b_3, \quad \alpha_i>1, \tag{4}$$

$$\mid\varphi_i(\xi)\mid \leqslant b_{4i}\mid\xi\mid^{\alpha_i-1} + b_5, \tag{5}$$

здесь b_{ij} — постоянные, для которых справедливы неравенства

$$b_{0i}>0,\ b_{1i}\geqslant 0,\ b_{2i}>0,\ b_{3i}\geqslant 0,\ b_{4i}>0,\ b_{5i}\geqslant 0\,, i=1,2.$$

Функции $k_i(x,\xi_0,\xi)$, $(i=1,2)$, предполагаются непрерывными по x,ξ_0 и ξ, измеримыми по x и удовлетворяющими при любых $x\in\Omega$, $\xi_0\in R^1$, ξ^1, ξ^2, $\xi\in R^2$ условиям

$$\mid k_i(x,\xi_0,\xi)\mid \leqslant M_{01}\sum_{j=1}^{2}\mid\xi_2\mid^{p_1-1} + M_{11}, \quad M_{01}>0,\ M_{11}\geqslant 0,\ p_1>1, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{2} k_i(x,\xi_0,\xi)\xi_i \geqslant M_{21}\sum_{i=1}^{2}\mid\xi_i\mid^{p_1} - M_{31}, M_{21}>0,\ M_{31}\geqslant 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(k_i(x,\xi_0,\xi^1)-k_i(x,\xi_0,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)\geqslant 0, \tag{8}$$

$$\mid k_\Pi(x,\xi_0,\xi)\mid \leqslant M_{02}\mid\xi\mid^{p_2-1} + M_{12}\,, \quad M_{02}>0,\ M_{12}\geqslant 0,\ p_2>1, \tag{9}$$

$$k_\Pi(x,\xi_0,\xi)\xi \geqslant M_{22}\mid\xi\mid^{p_2} - M_{32}, \qquad M_{22}>0,\ M_{32}\geqslant 0, \tag{10}$$

$$(k_\Pi(x,\xi_0,\xi^1)-k_\Pi(x,\xi_0,\xi^2))(\xi^1-\xi^2) \geqslant 0 \quad \forall\xi,\ \xi^1,\ \xi^2\in R^1. \tag{11}$$

При определении обобщенного решения задачи (1)–(3) используются специальные нормированные пространства, называемые усиленными пространствами Соболева: будем обозначать $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $\overset{\circ}{W}(0,T)$ — банаховы пространства функций, полученные замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ в следующих нормах

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}} = \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)},$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}(0,T)} = \|u\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))},$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}(0,T)} = \|u\|_{\overset{\circ}{V}(0,T)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))}.$$

В работе [2] доказано, что пространство $\overset{\circ}{V}$ совпадает с множеством функций из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$, след которых на Π из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)$. Аналогичный результат получен в [2] и для $\overset{\circ}{V}(0,T)$.

Пусть, далее, z − некоторый элемент из $\overset{\circ}{V}\,(0,T)$. Обозначим через $J(z(t))$ функционал, значение которого при $t\in[0,T]$ на элементах $v\in\overset{\circ}{V}$ определяется по правилу

$$\langle J(z(t)),v\rangle_*=\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{\Omega}\varphi_1(z(t))v(x)dx+\int\limits_{\Pi}\varphi_2(z(t))v(s)ds\biggr),$$

здесь и в дальнейшем $\langle F,v\rangle_*$ − значение функционала $F\in(\overset{\circ}{V})^*$ на элементе $v\in\overset{\circ}{V}$.

Определение 1. *Функцию $u\in\overset{\circ}{W}\,(0,T)$ такую, что*

$$u(x,0)=u_0(x)\quad \textit{п. в. в } \Omega \textit{ и в } \Pi,$$

$$\int\limits_0^T\langle\, J(u)\,,\cdot\,\rangle_*\,dt\,\in\,(\overset{\circ}{V}\,(0,T))^*, \tag{12}$$

назовем обобщенным решением задачи (1)–(3)*, если для любой функции $v\in\overset{\circ}{W}\,(0,T)$ справедливо следующее интегральное тождество*

$$\int\limits_0^T\langle\, J(u)\,,\,v\,\rangle_*\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^2k_i(x,u,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Pi}k_{\Pi}\Bigl(x,u,\frac{\partial u}{\partial s}\Bigr)\frac{\partial v}{\partial s}\,dsdt=\int\limits_0^T\langle f_1,v\rangle\,dt+\int\limits_0^T\langle f_2,v\rangle_{\Pi}\,dt, \tag{13}$$

здесь $\langle f,v\rangle$ ($\langle f,v\rangle_{\Pi}$) − значение функционала $f\in L_{p_1'}(0,T;W_{p_1'}^{-1}(\Omega))$ ($f\in L_{p_2'}(0,T;W_{p_2'}^{-1}(\Pi))$) на элементе v из $\overset{\circ}{W}\,(0,T)$.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в работах [3]– [4], где доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи.

2. Описание приближенного метода. Исследование сходимости.

Для задачи (1)–(3) с помощью метода полудискретизации по переменной t и МКЭ по пространственным переменным строится приближенный метод решения. Для этого на $[0,T]$ задается равномерная сетка $\bar\omega_\tau=\{0,\tau,\ldots,N\tau=T\}$, τ − шаг сетки. Далее, предполагая, что Ω − выпуклая область, определяется вписанный в Ω многоугольник Ω_h с границей Γ_h, удовлетворяющий следующим условиям:

1) для любой точки $x\in\Gamma$ найдется точка $\xi\in\Gamma_h$, находящаяся на расстоянии не большем h (h − шаг сетки по пространственным переменным);

2) точки пересечения Γ и Π являются вершинами многоугольника Ω_h.

Триангуляция области Ω_h осуществляется треугольниками по следующему правилу: для каждой из подобластей $\Omega_h^1\subset\Omega_h$ и $\Omega_h^2\subset\Omega_h$, на которые разрез Π делит Ω_h, триангуляция проводится автономно, но так, что множества узлов построенных на Ω_h^1 и на Ω_h^2 сеток, принадлежащих Π, совпадают. При таком разбиении в окрестности Π образуются треугольниками с одной криволинейной стороной. Обозначим $\overset{\circ}{V}_h$ множество функций из $\overset{\circ}{V}$, сужение которых на каждый конечный элемент является отображением заданной на базисном элементе линейной функции.

Определение 2. *Функцию $y(t)\in\overset{\circ}{V}_h$ для $t\in\{0,\tau,\ldots,T=N\tau\}$ назовем решением полудискретной задачи, если для любой функции $z\in\overset{\circ}{V}_h$ и для всех $t\in\{0,\tau,,T-\tau\}$ выполнены равенства*

$$\int\limits_{\Omega_h}\biggl(\varphi_{1\bar t}(y(t))\;z(x)\;+\sum_{i=1}^2k_i(x,y,\nabla\hat y)\frac{\partial z(x)}{\partial x_i}\biggr)dx+\int\limits_{\Pi}\biggl(\varphi_{2\bar t}(y(t))\;z(s)\;+k_{\Pi}(x,y,\frac{\partial\hat y}{\partial s})\frac{\partial z(s)}{\partial s}\biggr)ds\;=$$

$$= \int\limits_{\Omega_h} f_{1\tau}(t)z(x)dx \; + \int\limits_{\Pi} f_{2\tau}(t)z(s)ds, \tag{14}$$

$$y(x,0) = u_0(x) \;\textit{ п. в. в }\; \Omega_h \textit{ и на } \Pi. \tag{15}$$

Здесь $f_{i\tau}(x,t) = \dfrac{1}{\tau}\int\limits_{t}^{t+\tau} f_i(x,\xi)d\xi, \quad \hat{y}(t) = y(t+\tau), \quad i=1,2.$

С помощью топологической леммы Вишика установлена разрешимость системы (14), (15). Доказаны также следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(11). *Кроме того,*

$$f_1 \in L_{p'_1}(0,T;W^{-1}_{p'_1}(\Omega)),\;\; f_2 \in L_{p'_2}(0,T;W^{-1}_{p'_2}(\Pi)),\quad u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega).$$

Тогда для решения задачи (14)–(15) *имеют место следующие априорные оценки*

$$\|y(t')\|_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} \; + \; \|y(t')\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \; \leqslant c\,, \tag{16}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \left[\; \|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)} \; + \; \|y(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} \right] \leqslant c \quad \forall t' \in \omega_\tau\,, \tag{17}$$

$$\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \int\limits_{\Omega_{ih}} \Big(\varphi_i(y(t+k\tau)) - \varphi_i(y(t))\Big)\Big(y_m(t+k\tau) - y_m(t)\Big)\,dx \; \leqslant \; k\tau c, \qquad i=1,2, \;\; 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{18}$$

Здесь $\Omega_{1h} = \Omega_h,\; \Omega_{2h} = \Pi.$

Лемма 2. *Пусть* $\{y\}$ *– последовательность функций, для которых справедливы оценки* (16)–(18). *Тогда существуют функция* $u \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ *и последовательность шагов* $\{\tau\}$ *и* $\{h\}$ *такие, что при* $\tau \to 0$ *и* $h \to 0$

$$\Pi^{\pm}\tilde{y}(t) \;\rightharpoonup\; u \;\textit{ в }\; \overset{\circ}{V}(0,T)\,, \tag{19}$$

$$\Pi^{\pm}\tilde{y}(t) \rightharpoonup \; u \;\; * \textit{- слабо в } \; L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))\,, \tag{20}$$

$$\Pi^{\pm}\tilde{y}(t), \rightharpoonup \; u \;\; * \textit{- слабо в } \; L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi)), \tag{21}$$

$$\Pi^{+}\tilde{y}(t) \;\; \to \;\; u \;\; \textit{п.в. в } \; Q_T \;\; \textit{и на } \Pi_T, \tag{22}$$

где

$$\tilde{y}(x,t) \; = \begin{cases} y(x,t), & (x,t) \in \Omega_h \times \bar{\omega}_\tau, \\ 0, & (x,t) \in (\Omega \setminus \Omega_h) \times \bar{\omega}_\tau, \end{cases} \tag{23}$$

$\Pi^+ z$ *и* $\Pi^- z$ *– кусочно-постоянные восполнения сеточной функции* z, *равные значению* $z(t^*)$ *на множестве* $[t^*, t^*+\tau]$ *и* $[t^*-\tau, t^*]$) *соответственно.*

Остановимся на некоторых моментах доказательства леммы 2. Из априорных оценок (16)–(17) следует ограниченность последовательностей $\{\Pi^{\pm}\tilde{y}(t)\}$ в $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))$ и в $L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$. Поэтому найдется функция u из $\overset{\circ}{W}(0,T)$ и подпоследовательности последовательностей $\{\tau\}$, $\{h\}$ такие, что при имеют место соотношения (19)–(21). Оценки (16)–(18) и теорема компактности (см. [5]) позволяют выделить подпоследовательности $\{\tau\}$ и $\{h\}$ так , что наряду с (19)–(21) будет справедливым предельное соотношение (22).

Далее доказывается, что последовательность кусочно-постоянных восполнений решения схемы (14)–(15), удовлетворяющая соотношениям (19)–(22), сходится к обобщенному решению задачи (1)–(3). Для этого совершается предельный переход в равенстве

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Pi^+ \varphi_1(\hat{\tilde{y}}(t))\, v\, \Pi^+ \eta_{\tau\bar{t}}\, dxdt \;-\; \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0)\, v\, \eta(0)\, dx \;-$$

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Pi^+ \varphi_2(\tilde{y}(t))\, v\, \Pi^+ \eta_{\tau t}\, dsdt \;-\; \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0)\, v\, \eta(0)\, ds \;+$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \;\Pi^+ k_i(x, \tilde{y}, \nabla\hat{\tilde{y}})\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \Pi^+ \eta_\tau\, dxdt \;+\; \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \Pi^+ k_\Pi(x, \tilde{y}, \frac{\partial \hat{\tilde{y}}}{\partial s})\, \frac{\partial v}{\partial s}\, \Pi^+ \eta_\tau\, dsdt \;=$$

$$= \int\limits_0^T \Pi^+ \left\langle f_{1\tau}\,,\, v\eta_\tau \right\rangle dt \;+\; \int\limits_0^T \Pi^+ \left\langle f_{2\tau}\,,\, v\eta_\tau \right\rangle_\Pi dt,$$

которое получено из (14) после преобразования первого и третьего слагаемого с помощью формулы суммирования по частям и восполнения по переменной t. При этом используется метод монотонности и ранее доказанное равенство (см. [3])

$$\int\limits_0^T < J(u(t)), u(t) >_* dt = \lim_{\lambda\to 0} \int\limits_{T-\lambda}^T \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(u(t))dxdt - \sum_{i=1}^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi_i(u(0))dx.$$

Здесь обозначено $\Omega_1 = \Omega,\; \Omega_2 = \Pi$. Окончательным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть* Ω *— выпуклая область пространства* R^n*, функции* $\varphi_i,\; k_i,\; k_\Pi$ *удовлетворяют условиям* (16)–(18),

$$f_1 \in L_{{p'}_1}(0,T; W^{-1}_{{p'}_1}(\Omega)),\;\; f_2 \in L_{{p'}_2}(0,T; W^{-1}_{{p'}_2}(\Pi)),\;\;\; u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega).$$

Тогда подпоследовательность кусочно-постоянных по временной переменной восполнений решения схемы (14)–(15)*, удовлетворяющая соотношениям (19)–(22), сходится к обобщенному решению задачи* (1)–(3)*. В условиях единственности решения вся последовательность обладает этим свойством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонцев С.Н., Мейрманов А.М.** Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979. — 80 с.
2. **Тимербаев М.Р.** Об усиленных пространствах Соболева/ Препринт. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1998. — 35 с.
3. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** О разрешимости одной задачи совместного движения поверхностных и подземных вод // Известия Вузов. Математика. — 1994. — № 9. — С. 6–17.
4. **Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.** Теорема о единственности решения одной задачи теории совместного движения русловых и подземных вод // Известия Вузов. Математика. — 2000. — № 11. — С. 11–25.
5. **Alt H.W., Luckhaus S.** Quasilinear elliptic-parabolic differential equation // Mat.Z. — 1983. — Bd. 183, № 8. — P. 311–341.

REFERENCES

1. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems //Applicable Analysis. – 2001. – V. 80, № 3/4. – P. 279–315.
2. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. – 2001. – V. 8, № 1. – P. 35–51.
3. **Pavlova M.F.** On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration //Differential Equations. – 2011. – V. 47, № 8. – P. 1161–1175.
4. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** The unique solvability of a certain nonlocal nonlinear problem with a spatial operator strongly monotone with respect to the gradient // Russian Mathematics. – 2012. – № 3. – P. 83–86.
5. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator // Differential equations. – 2014. – V. 50, № 7. – P. 873–887.